1ères **Maths** **DS 4 Samedi 4 Mai 2024**

Durée 1h30 Calculatrice autorisée en **mode examen**

NOM :
Professeur :

Exercice 1 [4 points] Q.C.M.

Pour chaque question, indiquer sans justification la bonne réponse :

question	A	B	C	D	réponse
$\frac{\sqrt{e^{250}} \times e^5}{(e^2)^{64}} = \cdots$	calcul impossible !!!	1	e	e^2	
$1 + e + e^2 + \cdots + e^{100}$ est égal à …	$\frac{(1 + e^{100}) \times 101}{2}$	$2e^{50}$	$\frac{1 - e^{100}}{1 - e}$	$\frac{1 - e^{101}}{1 - e}$	
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x+1}$ $f'(x) = \cdots$	e^{-x+1}	$-e^x$	$-e^{-x+1}$	$(-x + 1)e^{-x}$	
ABC équilatéral tel que $AB = a$, alors : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \cdots$	$-\frac{a^2}{2}$	$\frac{a^2}{2}$	$-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$	

Exercice 2 [8 points]

Pour tout réel x, on pose $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$, on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan et pour tout réel a, on note T_a la tangente à $\mathcal{C}$ en a.

1. Calculer $f'(x)$.

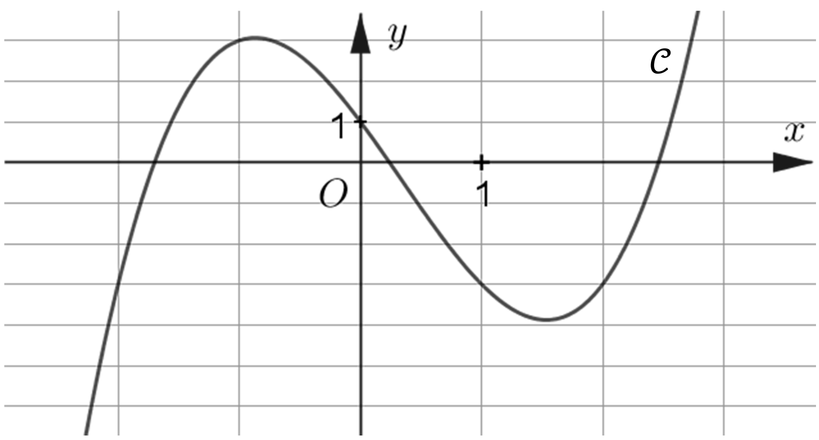
2. Montrer que T_a coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée : $-2a^3 + a^2 + 1$.

3. a. Déterminer les réels b, c, d tels que, pour tout réel x :

$$-2x^3 + x^2 + 1 = (x - 1)(bx^2 + cx + d)$$

b. On admet dans cette question que $b = -2$, $c = -1$ et $d = -1$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-2x^3 + x^2 + 1 = 0$.

4. Justifier qu'il existe un seul point E de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère.
Préciser les coordonnées de E, le placer sur la figure et tracer la tangente à $\mathcal{C}$ en E :



(figure à compléter)

<u>Exercice 3</u> [8 points]

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel :

$$u_{n+1} = \frac{15}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?

2. Pour tout n entier naturel on admet que $u_n \neq -5$ et on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 5}$$

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on admet que $v_n \neq 1$, montrer que :

$$u_n = \frac{3 + 5v_n}{1 - v_n}$$

En déduire u_n en fonction de n.

<u>BONUS</u> [1 point]

Une unité de distance étant choisie on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Démontrer que :

« $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ »

Corrigé thiaude

Exercice 1 Q.C.M.

question	A	B	C	D	réponse
$\dfrac{\sqrt{e^{250}} \times e^5}{(e^2)^{64}} = \cdots$	calcul impossible !!!	1	e	$\boxed{e^2}$	**D**
$1 + e + e^2 + \cdots + e^{100}$ est égal à …	$\dfrac{(1+e^{100}) \times 101}{2}$	$2e^{50}$	$\dfrac{1-e^{100}}{1-e}$	$\boxed{\dfrac{1-e^{101}}{1-e}}$	**D**
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{-x+1}$ $f'(x) = \cdots$	e^{-x+1}	$-e^x$	$\boxed{-e^{-x+1}}$	$(-x+1)e^{-x}$	**C**
ABC équilatéral, tel que $AB = a$, alors : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \cdots$	$\boxed{-\dfrac{a^2}{2}}$	$\dfrac{a^2}{2}$	$-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$	**A**

Justifications (non demandées)

• $\dfrac{\sqrt{e^{250}} \times e^5}{(e^2)^{64}} = \dfrac{e^{250\times\frac{1}{2}} \times e^5}{e^{2\times 64}} = \dfrac{e^{125} \times e^5}{e^{128}} = \dfrac{e^{125+5}}{e^{128}} = \dfrac{e^{130}}{e^{128}} = e^{130-128} = \boldsymbol{e^2}$

• $1 + e + e^2 + \cdots + e^{100}$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e donc, d'après la formule du cours :

$$1 + e + e^2 + \cdots + e^{100} = 1 \times \frac{1-e^{100+1}}{1-e} = \boldsymbol{\frac{1-e^{101}}{1-e}}$$

• $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$ donc $(e^{-x+1})' = -1e^{-x+1} = \boldsymbol{-e^{-x+1}}$

• $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, or d'après la formule du produit scalaire dans un triangle on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2}[a^2 + a^2 - a^2] = \frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2}{2}$$

donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -\boldsymbol{\dfrac{a^2}{2}}$. (autres méthodes possibles)

Exercice 2

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$, T_a la tangente à $\mathcal{C}$ en a

1. **Calculer $f'(x)$.**
   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$
2. **Montrer que T_a coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée : $-2a^3 + a^2 + 1$.**
   La tangente T_a admet pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ (cours)
   c'est-à-dire : $y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$, l'ordonnée à l'origine de T_a est donc :
   $-af'(a) + f(a)$, or :
   $$f(a) - af'(a) = a^3 - a^2 - 4a + 1 - a(3a^2 - 2a - 4)$$
   $$= a^3 - a^2 - 4a + 1 - 3a^3 + 2a^2 + 4a = -2a^3 + a^2 + 1$$
   La droite T_a coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée : $-2a^3 + a^2 + 1$.

3. a. **Déterminer les réels $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ tels que, pour tout réel $\boldsymbol{x}$:**

$$\boldsymbol{-2x^3 + x^2 + 1 = (x-1)(bx^2 + cx + d)}$$

En raisonnant sur le terme de plus haut degré, on a : $b = -2$ et en raisonnant sur le terme constant : $1 = -d$ autrement dit $d = -1$.

On doit donc avoir, pour tout réel x : $-2x^3 + x^2 + 1 = (x-1)(-2x^2 + cx - 1)$.
Le terme en x du membre de gauche est $0x$ et celui du membre de droit : $(-1-c)x$ donc : $-1-c = 0$, autrement dit : $c = -1$, finalement : $\boldsymbol{b = -2}$, $\boldsymbol{c = -1}$ et $\boldsymbol{d = -1}$.

Autre méthode

Développer $(x-1)(bx^2 + cx + d)$ puis par identification on obtient un système de trois équations à trois inconnues b, c, d à résoudre.

b. **On admet dans cette question que $\boldsymbol{b = -2}$, $\boldsymbol{c = -1}$ et $\boldsymbol{d = -1}$.**
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\boldsymbol{-2x^3 + x^2 + 1 = 0}$.

D'après la question précédente, l'équation $-2x^3 + x^2 + 1 = 0$ s'écrit :

$$(x-1)(-2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \; ou - 2x^2 - x - 1 = 0$$

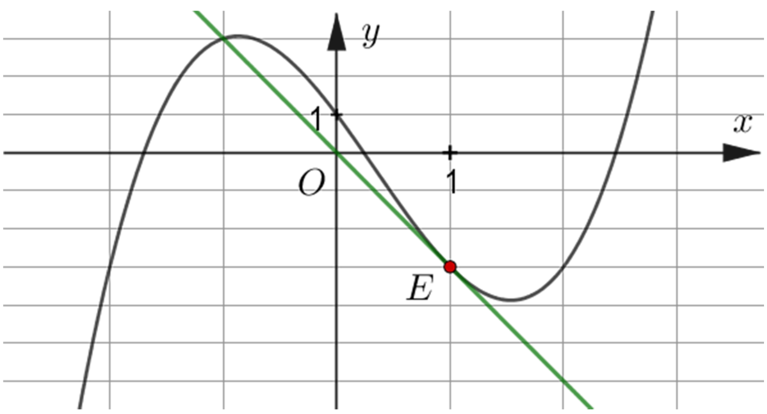
• $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• le discriminant de : $-2x^2 - x - 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(-2)(-1) = 1 - 8 = -7 < 0$ donc $-2x^2 - x - 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

L'équation $-2x^3 + x^2 + 1 = 0$ admet pour unqiue solution réelle : 1.

4. **Justifier qu'il existe un seul point $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ en lequel la tangente à $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ passe par l'origine du repère. Préciser les coordonnées de $\boldsymbol{E}$, le placer sur la figure et tracer la tangente à $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ en $\boldsymbol{E}$.**

L'abscisse d'un tel point vérifie (d'après **2.**) : $-2x^3 + x^2 + 1 = 0$, or (d'après **3.**) cette équation admet pour unique solution 1, donc : $a = 1$.
Par conséquent il existe un seul point de $\mathcal{C}$ répondant à la question, point d'abscisse 1.
En notant E ce point on a : $x_E = 1$.
$E \in \mathcal{C}$, $y_E = f(x_E)$, or $f(x_E) = f(1) = (1)^3 - (1)^2 - 4(1) + 1 = 1 - 1 - 4 + 1 = -3$.
Finalement : $\boldsymbol{E(1\,; -3)}$.
La tangente T_1 admet pour équation $y = \alpha x$ avec $y_E = \alpha x_E$ c'est-à-dire : $-3 = \alpha \times 1$, soit $\alpha = -3$; la droite T_1 admet pour équation réduite $y = -3x$.



Exercice 3

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel :

$$\boldsymbol{u_{n+1} = \frac{15}{u_n + 2}}$$

1. **Calculer u_1 et u_2 : la suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique, ni l'un ni l'autre ?**

$$u_1 = \frac{15}{u_0 + 2} = \frac{15}{1+2} = \frac{15}{3} = \mathbf{5}$$

$$u_2 = \frac{15}{u_1 + 2} = \frac{15}{5+2} = \boldsymbol{\frac{15}{7}}$$

On a d'une part :

$$u_1 - u_0 = 5 - 1 = 4 \text{ et } u_2 - u_1 = \frac{15}{7} - 5 = \frac{15}{7} - \frac{35}{7} = -\frac{20}{7}$$

On constate que $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc (u_n) **n'est pas arithmétique**.

D'autre part, on a :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{5}{1} = 5 \text{ et } \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{15}{7}}{5} = \frac{15}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{15 \times 1}{7 \times 5} = \frac{5 \times 3 \times 1}{7 \times 5} = \frac{3}{7}$$

On constate que $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc (u_n) **n'est pas géométrique**.

2. **Pour tout n entier naturel on pose :**

$$\boldsymbol{v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 5}}$$

   a. **Calculons v_0** :

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0 + 5} = \frac{1-3}{1+5} = \frac{-2}{6} = -\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

Montrons que la suite (v_n) est géométrique et précisons sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 5} = \frac{\frac{15}{u_n + 2} - 3}{\frac{15}{u_n + 2} + 5} = \frac{\frac{15}{u_n + 2} - \frac{3(u_n + 2)}{u_n + 2}}{\frac{15}{u_n + 2} + \frac{5(u_n + 2)}{u_n + 2}} = \frac{\frac{15}{u_n + 2} - \frac{3u_n + 6}{u_n + 2}}{\frac{15}{u_n + 2} + \frac{5u_n + 10}{u_n + 2}}$$

$$= \frac{\frac{15 - (3u_n + 6)}{u_n + 2}}{\frac{15 + (5u_n + 10)}{u_n + 2}} = \frac{\frac{-3u_n + 9}{u_n + 2}}{\frac{5u_n + 25}{u_n + 2}} = \frac{-3u_n + 9}{u_n + 2} \times \frac{u_n + 2}{5u_n + 25} = \frac{-3(u_n - 3)}{5(u_n + 5)}$$

$$= \frac{-3}{5} \times \frac{u_n - 3}{u_n + 5} = -\frac{3}{5} v_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{3}{5} v_n$ et $(-\frac{3}{5})$ est une constante donc la suite (v_n) **est géométrique de raison $(-\frac{3}{5})$**.

b. Exprimer v_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = v_0 \times q^n$ (cours), or $v_0 = -\frac{1}{3}$ et $q = -\frac{3}{5}$ donc :

$v_n = -\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, (admis) $v_n \neq 1$, montrer que : $u_n = \frac{3+5v_n}{1-v_n}$, exprimer u_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$, en admettant que $u_n \neq -5$ et $v_n \neq 1$, on a les équivalences :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 5} \Leftrightarrow v_n(u_n + 5) = u_n - 3 \Leftrightarrow v_n u_n + 5v_n = u_n - 3$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -3 - 5v_n \Leftrightarrow u_n = \frac{-3 - 5v_n}{v_n - 1}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3 + 5v_n}{1 - v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{3 + 5\left(-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)}{-\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n - 1} \Leftrightarrow u_n = \frac{3 - \frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boldsymbol{u_n = \frac{3 - \frac{5}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right)^n}}$$

BONUS

Une unité de distance est choisie, démontrer que :

« $\vec{u} \perp \vec{v}$ si et seulement si $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ »

On a les équivalences :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u}^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} = -2\,\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow 4\,\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

On a donc bien : $\boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|}$.

Autre méthode

On munit le plan d'un repère orthonormé, on a : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, donc : $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $\vec{u} - \vec{v}\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$. Le repère étant orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Rappelons que, dans un repère orthonormé, si $\vec{U}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{U}\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Avec ces notations on a les équivalences :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| \Leftrightarrow \sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (x + x')^2 + (y + y')^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 = x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2$$

$$\Leftrightarrow 2xx' + 2yy' = -2xx' - 2yy' \Leftrightarrow 2xx' + 2xx' + 2yy' + 2yy' = 0$$

$$\Leftrightarrow 4xx' + 4yy' = 0 \Leftrightarrow 4(xx' + yy') = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$